

◆ 研 究 ノ ー ト

電気回路とグラフ理論を題材にした 物理と数学の分野横断的教育について

Interdisciplinary education for mathematics and physics on electric circuits and graph theory

理学研究科 数理科学専攻
赤穂 まなぶ

1 はじめに

物理と数学の間にはしばしば思いもよらない関係を持つテーマや現象が存在する。高校や大学の授業時間内ではそのような点について詳しく紹介することはなかなか難しいが、驚きや感動とともに各テーマについての興味を抱かせる方法として、そのような関係について触れることはとても教育的であり効果的である。

本稿では高校の物理で学ぶ電気回路と数学の位相幾何学におけるグラフ理論との間の意外な関係を紹介し、物理と数学における分野横断的教育の有用性について考察する。なお本稿は2014年に当時の首都大学東京理工学研究科の大学院生を対象にした理工横断セミナーにおいて著者が講演した内容にもとづいている。

2 電気回路

電気回路とは電池や抵抗器を導線でつないで電流を流す装置のことである。中学校理科および高校物理では電気回路の初歩を学ぶ。そこでまずはじめに出会うのがオームの法則である。

オームの法則 電気回路の2点間の電圧（電位差）は、その2点間に流れる電流に比例する。

オームの法則を数式で表すと、電気回路の2点間の電圧を V 、その2点間を流れる電流を I とすると、比例定数 R を用いて $V = RI$ となる。この比例定数 R は抵抗値とよばれる。なお単位は1V(ボルト)の電圧で1A(アンペア)の電流が流れるときの抵抗値が1Ω(オーム)である。

電気回路はしばしば回路記号を用いて表される。図1は電池の回路記号で点Pの電位から点Qの電位を引いた差が電圧 V である。

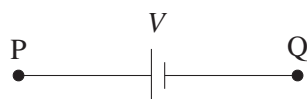


図1

図2は抵抗値が R の抵抗器の回路記号である。

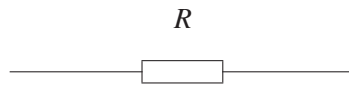


図 2

図 3 は最も簡単な電気回路で、電池の起電力を V とすると点 P の電位から点 Q の電位を引いた差が電圧 V となるためオームの法則より時計の針の回り方と逆の向きに $I = V/R$ の電流が流れる。

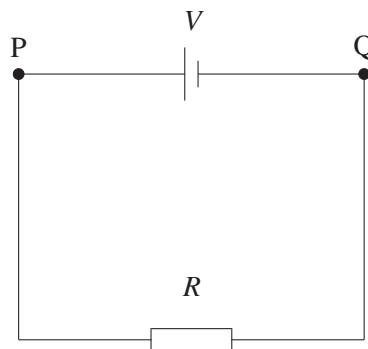


図 3

高校の物理では電池や抵抗器を複雑に配置した電気回路を流れる電流を計算する。そのときに用いるのがキルヒホッフの第 1 法則と第 2 法則である。

キルヒホッフの第 1 法則 電気回路の分岐点に流れ込む電流の和と流れ出る電流の和は等しい。

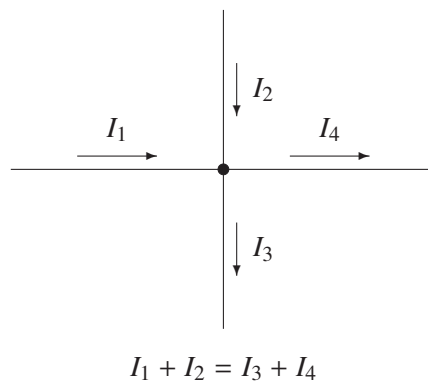
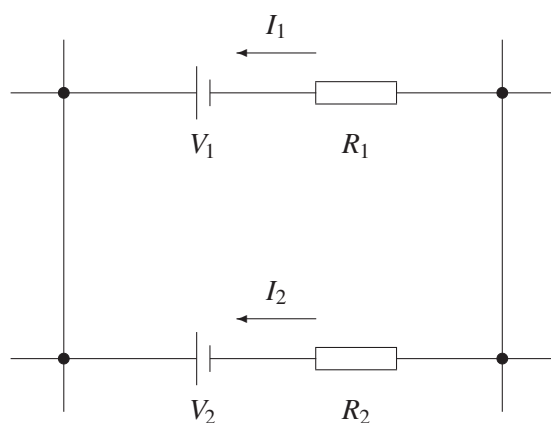


図 4

キルヒホッフの第1法則は電流を水流のように捉えれば直感にも良く合う合理的な法則である。次にキルヒホッフの第2法則を述べる。

キルヒホッフの第2法則 電気回路の任意の閉路における起電力の和と電圧降下の和は等しい。

ここで電圧降下とは電流が抵抗器を流れるときに失われる電圧のことである。また閉路には向きをつける必要があり、起電力の向きが閉路を進む向きと逆の場合には起電力にマイナスの符号を付け、同様に電流の向きが閉路を進む向きと逆の場合には電流にマイナスの符号を付ける。図5の閉路の進む向きは時計の針の回り方と逆の向きとしている。



$$V_1 - V_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2$$

図5

キルヒホッフの第2法則は電位を高さのように捉えれば直感にも良く合う合理的な法則である。ここで実際にキルヒホッフの法則を用いて電気回路を流れる電流を求める問題を解いてみよう。

問題 次のページの図6のような電気回路を考える。ここで $V_1 = 6\text{V}$, $V_2 = 2\text{V}$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 1\Omega$ とする。このとき分岐点を結ぶ各導線に流れる電流 I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 の値を求めよ。

解答 図6のように各分岐点を v_1, v_2, v_3 とし、また閉路に囲まれた領域を f_1, f_2, f_3 , さらに電気回路の外の領域を f_4 とする。

まずキルヒホッフの第1法則より各分岐点 v_1, v_2, v_3 に対して以下の方程式が成り立つ。

$$-I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (1)$$

$$I_1 + I_2 - I_4 - I_5 = 0 \quad (2)$$

$$I_3 + I_4 + I_5 = 0 \quad (3)$$

ここで (1)(2)(3) の左辺には I_i と $-I_i$ ($1 \leq i \leq 5$) が対で現れるので (1) と (2) の辺々を足した式の -1 倍は (3) となる。

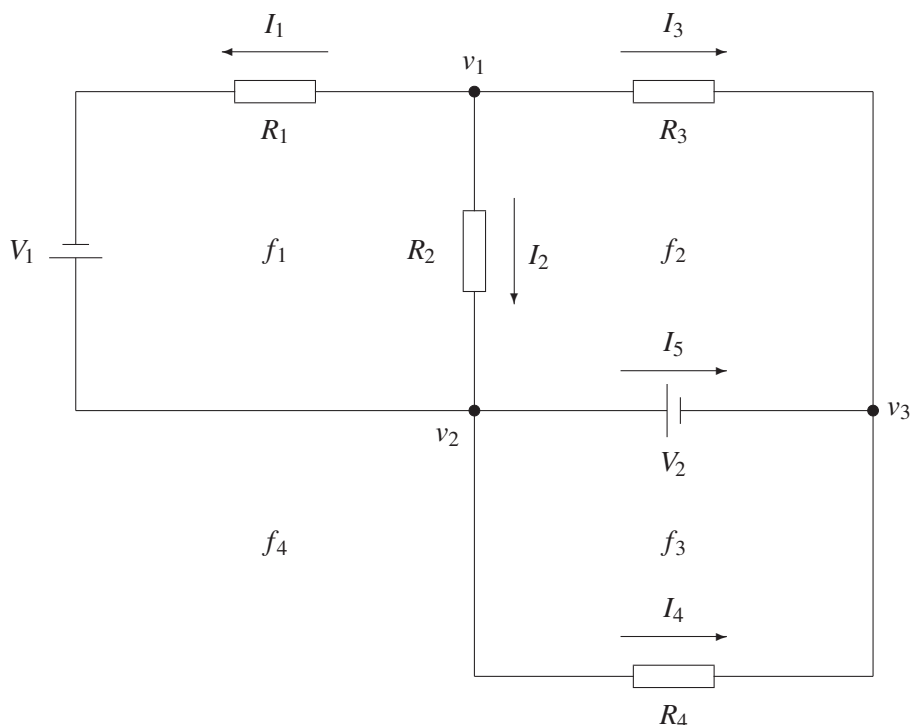


図 6

次にキルヒホッフの第 2 法則より各領域 f_1, f_2, f_3, f_4 に対して以下の方程式が成り立つ.

$$V_1 = R_1 I_1 - R_2 I_2 \quad (4)$$

$$-V_2 = R_2 I_2 - R_3 I_3 \quad (5)$$

$$V_2 = +R_4 I_4 \quad (6)$$

$$-V_1 = -R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_4 I_4 \quad (7)$$

ここで (7) は領域 f_4 の境界の閉路に対する方程式であるが, (4)~(7) の左辺には V_i と $-V_i$ ($i = 1, 2$) が対で現れ, また右辺には $R_i I_i$ と $-R_i I_i$ ($1 \leq i \leq 5$) が対で現れるので (4)~(6) の辺々を足した式の -1 倍は (7) となる.

したがって電流 I_i ($1 \leq i \leq 5$) を求めるには連立一次方程式 (1)(2)(4)(5)(6) を解けばよく, 求める答えは $I_1 = 1\text{A}, I_2 = -1\text{A}, I_3 = 0\text{A}, I_4 = 2\text{A}, I_5 = -2\text{A}$ となる. ただし負の値は図 6 の矢印の向きとは逆向きに電流が流れることを意味する. (解答終わり)

以上のように高校の物理では電気回路からキルヒホッフの法則を用いて連立一次方程式を立て, それを解くことにより電気回路に流れる電流を求めている. これは非常に単純明快でとても優れた解法である. しかしここで一つ疑問が起こる. 一般に勝手に作った連立一次方程式は解を持つとは限らなく, また解を持ったとしても一つとは限らない. 一方, 現実の世界では電気回路にはただ一通りに電流が流れる. このことより電気回路からキルヒホッフの法則を用いて作った連立一次方程式は必ず解をただ一つ持つのではないかという数学の予想にたどり着く.

3 グラフ理論

ここでは数学の位相幾何学という分野で扱われるグラフについて解説する.
点 (頂点) とそれらをつなぐ線分 (辺) からなる図形をグラフという.

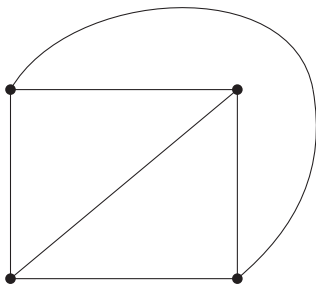


図 7

ここで各辺は直線である必要はなく, グニャグニャと曲がっていてもよい. グラフにおいて重要なのは各頂点がどのように辺で結ばれているかの情報である.

任意の二つの頂点が一本または二本以上の辺をたどってつながっているとき, そのグラフは連結であるという. 以下, 本稿ではグラフはすべて連結であると仮定する.

平面上に描かれたグラフで, 辺と辺どうしや, 辺と頂点が交叉していないものを平面グラフという. しばしば平面グラフは球面上に描かれていると解釈した方が都合が良いことがある. その理由は平面グラフは球面のオイラー数と密接に関わるからである.

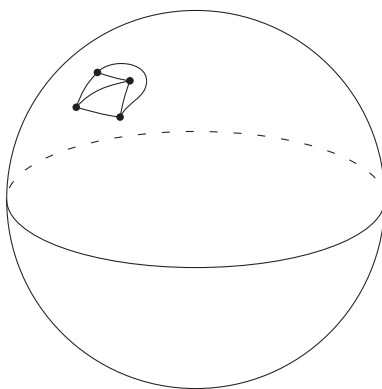


図 8

G を球面上に描かれた平面グラフとする. G に沿って球面を切り開いてできる各ピースを面という. G の頂点の個数を $v(G)$, 辺の本数を $e(G)$, 面の枚数を $f(G)$ で表す. 例えば図 8 のグラフ G では

$$v(G) = 4 \quad e(G) = 6 \quad f(G) = 4$$

となる.

このとき次のオイラーの公式が成り立つ.

オイラーの公式 任意の連結な平面グラフ G に対して

$$v(G) - e(G) + f(G) = 2$$

が成り立つ。

オイラーの公式に現れる 2 という数字は球面のオイラー数とよばれるものである。オイラーの公式は高校の数学で正多面体を分類するときなどに用いられ、高校生にとっては馴染みの深い公式である。なお文献 [2] には数学的帰納法を用いたオイラーの公式の初等的で優れた証明が載っている。興味のある読者はぜひ参照していただきたい。

最後に各辺に向きを付けたグラフを有向グラフという。また頂点 v_1 と頂点 v_2 をつなぐ辺 e に頂点 v_1 から頂点 v_2 に向かって向きが付いているとき頂点 v_1 を辺 e の始点、頂点 v_2 を辺 e の終点という。

4 電気回路とグラフ理論

ここでは電気回路を位相幾何学におけるグラフ理論の立場から捉え直し、電気回路に流れる電流と球面のオイラー数との意外な関係を紹介する。

グラフ G の頂点全体の集合を \mathbb{V} 、頂点の個数を $|\mathbb{V}|$ 、辺全体の集合を \mathbb{E} 、辺の本数を $|\mathbb{E}|$ とする。さらに G が球面上に描かれた平面グラフの場合には面全体の集合を \mathbb{F} 、面の枚数を $|\mathbb{F}|$ とする。

次に G を有向グラフとする。各辺 e に対して実数 V_e を対応させ、これらの全体の集合を $V := \{V_e\}_{e \in \mathbb{E}}$ と書くことにする。このとき V_e は負の値をとることもあり得ることに注意する。また各辺 e に対して 0 以上の実数 R_e を対応させ、これらの全体の集合を $R := \{R_e\}_{e \in \mathbb{E}}$ と書くことにする。この V と R はそれぞれ電圧と抵抗値を想定したものであり、組 (G, V, R) はまさに電気回路を数学的に定式化したものとなっている。ではこのとき‘電気回路 (G, V, R) に流れる電流’を数学的にどのように定式化すればよいだろうか。

組 (G, V, R) の各辺 e に対応させた実数 I_e に対して次の二つの条件を考える。

条件 1 頂点 v を終点とする辺を e_{i_1}, \dots, e_{i_M} 、頂点 v を始点とする辺を e_{j_1}, \dots, e_{j_N} とするとき

$$I_{e_{i_1}} + \dots + I_{e_{i_M}} = I_{e_{j_1}} + \dots + I_{e_{j_N}}$$

条件 2 頂点 v から出発して辺 e_1, \dots, e_L をたどって再び頂点 v に戻って来る閉路を考える。閉路の各辺 e_i に対して、閉路を進む向きと辺 e_i の向きが同じ場合は $\varepsilon_i := 1$ 、閉路を進む向きと辺 e_i の向きが逆の場合は $\varepsilon_i := -1$ とするとき

$$\varepsilon_1 V_{e_1} + \dots + \varepsilon_L V_{e_L} = \varepsilon_1 R_{e_1} I_{e_1} + \dots + \varepsilon_L R_{e_L} I_{e_L}$$

この二つの条件はもちろんキルヒホッフの法則そのものであるが、ここではそれを逆手に取って条件とした。すなわちこの二つの条件を満たす $I := \{I_e\}_{e \in \mathbb{E}}$ が‘電気回路 (G, V, R) に流れる電流’の数学的な定式化であるといえる。

しかしこのように電流を数学的に定式化してしまうと一つの問題が起こる。現実の世界では任意の電気回路にはただ一通りに電流が流れるが、はたして任意の組 (G, V, R) に対して上の二つの条件を満たす I はただ一つ存在するであろうか。本稿では以下の定理を証明する。

定理 組 (G, V, R) は次の条件を満たすと仮定する.

- G は球面上に描かれた平面グラフである.
- 各辺 e に対して $R_e = 1$.

このとき次の (i)(ii) は同値である.

- (i) $|V| - |\mathbb{E}| + |\mathbb{F}| = 2$.
- (ii) 条件 1 と条件 2 を満たす I がただ一つ存在する.

(i) はオイラーの公式そのものである. したがって定理の仮定を満たす組 (G, V, R) は自動的に (ii) を満たすことになる. しかしこの定理の真に驚くべきところは (ii) の ‘電気回路にはただ一通りに電流が流れる’ という現実の世界の物理現象が (i) すなわちオイラーの公式という数学の定理を導くという点にある (文献 [3][4]).

なお一般の組 (G, V, R) に対しても条件 1 と条件 2 を満たす I がただ一つ存在する. 証明は文献 [5] などを参照していただきたい.

5 定理の証明

ここでは定理の厳密な証明を数学のスタイルで与える. 記号は前節と同じものを用いる. グラフ G は球面上に描かれた平面グラフとし, 組 (G, V, R) に対してグラフ G の頂点を $v_1, \dots, v_{|V|}$, 辺を $e_1, \dots, e_{|\mathbb{E}|}$, 面を $f_1, \dots, f_{|\mathbb{F}|}$ とする. また各面を囲む閉路の進む向きは時計の針の回り方と逆の向きとする.

次に $|\mathbb{E}|$ 次元ベクトル $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, \dots, u_{i|\mathbb{E}|})$, $1 \leq i \leq |V|$, を

$$u_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{辺 } e_j \text{ の終点} \text{ が } v_i \text{ の場合} \\ -1 & \text{辺 } e_j \text{ の始点} \text{ が } v_i \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

と定める. また $|\mathbb{E}|$ 次元ベクトル $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{i|\mathbb{E}|})$, $1 \leq i \leq |\mathbb{F}|$, を

$$v_{ij} := \begin{cases} \varepsilon_j & \text{辺 } e_j \text{ が面 } f_i \text{ を囲む閉路に含まれる場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

と定める. このとき次の命題が成り立つ.

命題 組 (G, V, R) は定理の仮定を満たすとする. このとき

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_{|V|} \mathbf{u}_{|V|} + b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_{|\mathbb{F}|} \mathbf{v}_{|\mathbb{F}|} = (0, \dots, 0)$$

ならば

$$a_1 = \dots = a_{|V|}, \quad b_1 = \dots = b_{|\mathbb{F}|}$$

である.

証明 まずベクトル $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ の定義より $a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_{|\mathbb{V}|} \mathbf{u}_{|\mathbb{V}|} + b_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + b_{|\mathbb{F}|} \mathbf{v}_{|\mathbb{F}|} = (0, \dots, 0)$ の第 j 成分は

$$a_{s_j} - a_{t_j} + b_{p_j} - b_{q_j} = 0, \quad (8)$$

ただし添字 s_j, t_j, p_j, q_j は

- 辺 e_j の終点が頂点 v_{s_j} , 始点が頂点 v_{t_j} ,
- 辺 e_j は面 f_{p_j} を囲む閉路と面 f_{q_j} を囲む閉路に含まれ, 面 f_{p_j} を囲む閉路の進む向きと辺 e_j の向きは同じで, 面 f_{q_j} を囲む閉路の進む向きと辺 e_j の向きは逆,

となる.

次に $a_1, \dots, a_{|\mathbb{V}|}$ のうち最大のものを a とする. ここで添字を適当に入れかえて $a_1 = a$ としてよい. さらに辺の添字を適当に入れかえて頂点 v_1 を終点として持つ辺を e_1, \dots, e_N , 頂点 v_1 を始点として持つ辺を e_{N+1}, \dots, e_M とすると

$$s_1 = \cdots = s_N = t_{N+1} = \cdots = t_M = 1$$

より

$$a_{s_1} = \cdots = a_{s_N} = a_{t_{N+1}} = \cdots = a_{t_M} = a \quad (9)$$

となる. さらに辺 e_i と辺 e_j が頂点 v_1 を端点に持ち, 辺 e_i, e_j の順に頂点 v_1 を中心に時計の針の回る向きに隣り合う場合, 辺 e_i と辺 e_j の向きにより次の (a)(b)(c)(d) の場合が起こる.

- (a) 頂点 v_1 が辺 e_i と辺 e_j の終点の場合, $p_i = q_j$ より $b_{p_i} = b_{q_j}$.
- (b) 頂点 v_1 が辺 e_i と辺 e_j の始点の場合, $q_i = p_j$ より $b_{q_i} = b_{p_j}$.
- (c) 頂点 v_1 が辺 e_i の終点, 頂点 v_1 が辺 e_j の始点の場合, $p_i = p_j$ より $b_{p_i} = b_{p_j}$.
- (d) 頂点 v_1 が辺 e_i の始点, 頂点 v_1 が辺 e_j の終点の場合, $q_i = q_j$ より $b_{q_i} = b_{q_j}$.

したがってこれらより

$$\sum_{j=1}^N (b_{p_j} - b_{q_j}) - \sum_{j=N+1}^M (b_{p_j} - b_{q_j}) = 0 \quad (10)$$

が成り立つ. ここで $1 \leq j \leq N$ の場合の式 (8) と $N+1 \leq j \leq M$ の場合の式 (8) の -1 倍の式の辺々をすべて足し合わせると式 (9)(10) より

$$a = \frac{1}{M} \left(\sum_{j=1}^N a_{t_j} + \sum_{j=N+1}^M a_{s_j} \right)$$

を得る. この左辺の a は $a_1, \dots, a_{|\mathbb{V}|}$ の最大値で, 一方, 右辺は $a_{t_1}, \dots, a_{t_N}, a_{s_{N+1}}, \dots, a_{s_M}$ の平均値なので

$$a_{t_1} = \cdots = a_{t_N} = a_{s_{N+1}} = \cdots = a_{s_M} = a$$

となる. 添字 $t_1, \dots, t_N, s_{N+1}, \dots, s_M$ は頂点 v_1 と一本の辺で結ばれている頂点の添字であり, 今グラフ G は連結であるので, これらのことから最大値 a がすべての添字に渡ってどんどん伝わっていき

$$a_1 = \cdots = a_{|\mathbb{V}|} = a$$

を得る. すると式 (8) は各 j に対して $b_{p_j} - b_{q_j} = 0$ となり, 添字 p_j, q_j は辺 e_j を境界を持つ面の添字であったので, 再びグラフ G が連結であることより

$$b_1 = \cdots = b_{|\mathbb{F}|}$$

を得る. (証明終わり)

命題より次の系が成り立つ.

系 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{|\mathbb{V}|-1}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{|\mathbb{F}|-1}$ は一次独立, すなわち

$$c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_{|\mathbb{V}|-1} \mathbf{u}_{|\mathbb{V}|-1} + c_{|\mathbb{V}|} \mathbf{v}_1 + \cdots + c_{|\mathbb{V}|+|\mathbb{F}|-2} \mathbf{v}_{|\mathbb{F}|-1} = (0, \dots, 0)$$

ならば

$$c_1 = \cdots = c_{|\mathbb{V}|+|\mathbb{F}|-2} = 0$$

である.

証明 まず $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ の定義より

$$\sum_{i=1}^{|\mathbb{V}|} \mathbf{u}_i = (0, \dots, 0), \quad \sum_{i=1}^{|\mathbb{F}|} \mathbf{v}_i = (0, \dots, 0)$$

である. したがって

$$c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_{|\mathbb{V}|-1} \mathbf{u}_{|\mathbb{V}|-1} + c_{|\mathbb{V}|} \mathbf{v}_1 + \cdots + c_{|\mathbb{V}|+|\mathbb{F}|-2} \mathbf{v}_{|\mathbb{F}|-1} = (0, \dots, 0)$$

ならば任意の実数 α, β に対して

$$(c_1 + \alpha) \mathbf{u}_1 + \cdots + (c_{|\mathbb{V}|-1} + \alpha) \mathbf{u}_{|\mathbb{V}|-1} + \alpha \mathbf{u}_{|\mathbb{V}|} \\ + (c_{|\mathbb{V}|} + \beta) \mathbf{v}_1 + \cdots + (c_{|\mathbb{V}|+|\mathbb{F}|-2} + \beta) \mathbf{v}_{|\mathbb{F}|-1} + \beta \mathbf{v}_{|\mathbb{F}|} = (0, \dots, 0)$$

である. すると命題より

$$c_1 + \alpha = \cdots = c_{|\mathbb{V}|-1} + \alpha = \alpha, \quad c_{|\mathbb{V}|} + \beta = \cdots = c_{|\mathbb{V}|+|\mathbb{F}|-2} + \beta = \beta$$

が成り立つ. したがってこれより

$$c_1 = \cdots = c_{|\mathbb{V}|+|\mathbb{F}|-2} = 0$$

を得る. (証明終わり)

ここで $(|\mathbb{V}| + |\mathbb{F}| - 2) \times |\mathbb{E}|$ 行列 C を次のように定める.

$$C := \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & \cdots & u_{1|\mathbb{E}|} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{|\mathbb{V}|-1, 1} & \cdots & \cdots & u_{|\mathbb{V}|-1, |\mathbb{E}|} \\ v_{11} & \cdots & \cdots & v_{1|\mathbb{E}|} \\ \vdots & & & \vdots \\ v_{|\mathbb{F}|-1, 1} & \cdots & \cdots & v_{|\mathbb{F}|-1, |\mathbb{E}|} \end{bmatrix}$$

すると系より行列 C の階数は $|\mathbb{V}| + |\mathbb{F}| - 2$ であり, 特に $|\mathbb{V}| + |\mathbb{F}| - 2 \leq |\mathbb{E}|$ であることがわかる. (行列の階数については文献 [1] などを参照.) また条件 1 と条件 2 は $I_1, \dots, I_{|\mathbb{E}|}$ を未知変数とする連立一次方程式であると見なすことができるが, それを行列を用いて表すと

$$C \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{|\mathbb{E}|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{j_1} \varepsilon_{j_1} V_{e_{j_1}} \\ \vdots \\ \sum_{j_{|\mathbb{F}|}} \varepsilon_{j_{|\mathbb{F}|}} V_{e_{j_{|\mathbb{F}|}}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

となる. ただし右辺の $\sum_{j_i} \varepsilon_{j_i} V_{e_{j_i}}$ は面 f_i を囲む閉路に含まれる辺の添字 j_i に渡る $\varepsilon_{j_i} V_{e_{j_i}}$ の和である. すると行列 C の階数が $|\mathbb{V}| + |\mathbb{F}| - 2$ であることから, この連立一次方程式の解は存在して一般解は $(|\mathbb{E}| - |\mathbb{V}| - |\mathbb{F}| + 2)$ 個のパラメーターを持つことがわかる. (行列の階数と連立一次方程式の解の関係については文献 [1] などを参照.)

以上ですべての準備が終わり定理の証明に入る. (i) から (ii) の証明. (i) すなわち $|\mathbb{V}| - |\mathbb{E}| + |\mathbb{F}| = 2$ が成り立つならば連立一次方程式 (11) の一般解の持つパラメーターは 0 個であり (ii) が成り立つ. (ii) から (i) の証明. (ii) が成り立つならば連立一次方程式 (11) の一般解のパラメーターの個数 $|\mathbb{E}| - |\mathbb{V}| - |\mathbb{F}| + 2$ は 0 であり (i) が成り立つ. (定理の証明終わり)

6 まとめ

学びにおいて広い視野を持ち新しいテーマに興味を持つことはとても重要であり, 分野横断的教育はそれを手助けするための一つの取り組みであるといえる. 分野横断的教育において重要なことは物事を広く浅く学ぶことではなく, 物事を広く深く学ぶことである. もちろんそれは決して容易なことではないが, 様々なテーマの間の意外な結びつきを発見したときの驚きや感動は物事を広く深く学ぶことのモチベーションへとつながる. また分野横断的教育には専門性を高め軸足をしっかり固めることの重要性を再認識できるという効果もある.

本稿では電気回路を位相幾何学におけるグラフ理論の立場から捉え直し, 電気回路に流れる電流と球面のオイラー数の意外な結びつきについて紹介した. またその過程において線形代数の重要性と汎用性の高さを再認識することができた.

様々な情報が飛び交い問題が複合化する現代において分野横断的教育の役割は今後ますますその重要性を増すものと思われる.

【参考文献】

- [1] 小林正典, 寺尾宏明, 線形代数・講義と演習 (改訂版), 培風館, 2014 年
- [2] 相馬輝彦, 位相幾何学的グラフ理論を使った論理的思考の学習と高校数学との関連, 首都大学東京教職課程紀要 第 001 号, 2017 年
- [3] 時枝正, 逆応用数学のこころみ, セミナー, 東北大学, 2010 年 2 月 16 日
- [4] 時枝正, 物理を数学へ応用する, 数学セミナー 2014 年 7 月号, 日本評論社, 2014 年
- [5] B. Bollobás, Modern Graph Theory, Springer 1998